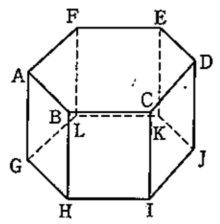
ベクトル ⑦

□自力で解けた　　□解答見た

【10分】



右図のような正六角柱があり，すべての辺の長さは2とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AG}=\vec{c}$とするとき

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ア}},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{イウ}}$$

$$\overrightarrow{EH}=\boxed{\text{エオ}}\,\vec{b}+\vec{c}$$

である。

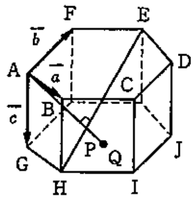
線分EH上の点をPとして，APとEHが垂直になるとき

$$\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\vec{b}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\vec{c}$$

と表される。さらに直線APと面GHIJKLとの交点をQとすると，

AP：PQ＝$\boxed{\text{コ}}$：$\boxed{\text{サ}}$である。

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot 2\cdot\cos 90^\circ=0$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 2\cos 120^\circ=-2$$
$$\overrightarrow{AE}=\vec{a}+2\vec{b},\ \ \overrightarrow{AH}=\vec{a}+\vec{c}$$



であるから

$$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}$$
$$=(\vec{a}+\vec{c})-(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=-2\vec{b}+\vec{c}$$

$\overrightarrow{EP}=t\overrightarrow{EH}$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+t\overrightarrow{EH}=\vec{a}+2\vec{b}+t(\vec{c}-2\vec{b})$$
$$=\vec{a}+2(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$$

$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{EH}$ より

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{EH}=\{\vec{a}+2(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-2\vec{b})=0$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$ より

$$20t-12=0 \qquad \therefore\ \ t=\frac{3}{5}$$

よって　$\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\frac{4}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}$

さらに，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ とおくと

$$\overrightarrow{AQ}=k\vec{a}+\frac{4}{5}k\vec{b}+\frac{3}{5}k\vec{c}$$

Q は平面 GHIJKL 上にあるから

$$\frac{3}{5}k=1 \qquad \therefore\ \ k=\frac{5}{3}$$

よって　AP : PQ=3 : 2

ベクトル ⑧

□自力で解けた　□解答見た

【15分】

Oを原点とする座標空間に，3点A(1，0，0)，B(0，2，0)，C(0，0，3)を考える。
線分ABを $a:1-a$ に内分する点をP，線分PCを $b:1-b$ に内分する点をQとする(ただし，$0<a<1$，$0<b<1$ である)。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を a，b を用いて表せば

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\left(\boxed{ア}-a\right)\left(\boxed{イ}-b\right),\ \boxed{ウエ}\left(\boxed{オ}-b\right),\ \boxed{カ}\,b\right)$$

である。

(2) $a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{3}$ とする。点Qを中心とし，yz 平面に接する球面を S とする。S の方程式は

$$\left(x-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\right)^2+\left(y-\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\right)^2+\left(z-\boxed{サ}\right)^2=\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$$

である。S 上の点でOに最も近い点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}},\ \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}},\ \frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}\right)$$

である。また S に接し，xy 平面に平行な平面のうち，原点から遠い方の方程式は

$$z=\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$$

である。

(3) 点D(2，2，3)を通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を ℓ とする。ℓ 上の点をRとすると，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{DR}}=t\vec{u}$ と表されるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\boxed{ヌ}+t,\ \boxed{ネ}+t,\ \boxed{ノ}+t\right)$$

である。Qが ℓ 上にあるとき

$$a=\frac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}},\quad b=\frac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘホ}}$$

である。

$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,\ 2,\ 0)$, $\overrightarrow{OC}=(0,\ 0,\ 3)$

(1) $\overrightarrow{OP}=(1-a)\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OB}=(1-a,\ 2a,\ 0)$

$\overrightarrow{OQ}=(1-b)\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OC}$

$=((1-a)(1-b),\ 2a(1-b),\ 3b)$

(2) $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3},\ 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3},\ 3\cdot\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$$

であるから　$Q\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1\right)$

球面 S は，yz 平面に接するから，半径は Q の x 座標から　$\dfrac{1}{2}$

よって，S の方程式は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$$

S 上の点で，O に最も近いのは線分 OQ と S との交点(T とする)である。

$$OQ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{49}{36}}=\frac{7}{6}$$

$$OT=\frac{7}{6}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

よって　$OT:OQ=\dfrac{2}{3}:\dfrac{7}{6}=4:7$

$$\overrightarrow{OT}=\frac{4}{7}\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)=\left(\frac{2}{7},\ \frac{4}{21},\ \frac{4}{7}\right)$$

$\therefore$　$T\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{4}{21},\ \dfrac{4}{7}\right)$

また，S に接し，xy 平面に平行な平面は，Q の z 座標が 1 であり，半径が $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$z=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

(3) $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DR}=\overrightarrow{OD}+t\vec{u}=(2,\ 2,\ 3)+t(1,\ 1,\ 1)$

$=(2+t,\ 2+t,\ 3+t)$

Q が ℓ 上にあるとき

$(1-a)(1-b)=2+t$, $2a(1-b)=2+t$, $3b=3+t$

であるから，t を消去して

$(1-a)(1-b)=2a(1-b)$, $2a(1-b)-3b=-1$

ゆえに　$(1-b)(1-3a)=0$, $2a(1-b)=3b-1$

であり　$a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{5}{11}$

ベクトル ⑨

□自力で解けた　　□解答見た

【15 分】

点 O を原点とする座標空間に 3 点 A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 4)がある。
線分 AB を 1：2 に内分する点を D, 線分 BC を 1：2 に内分する点を E とすると

$$D\left(\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}},\ 0\right),\quad E\left(0,\ \frac{\boxed{エ}}{\boxed{イ}},\ \frac{\boxed{オ}}{\boxed{イ}}\right)$$

であり，$0<a<1$ とし，線分 DE を $a:1-a$ に内分する点を P とすると

$$P\left(\frac{\boxed{カ}-\boxed{キ}a}{\boxed{イ}},\ \frac{\boxed{ク}a+\boxed{ケ}}{\boxed{イ}},\ \frac{\boxed{コ}}{\boxed{イ}}a\right)$$

である。

直線 BP と直線 AC が垂直であるとき，$a=\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ である。

また

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}\left(\boxed{ソ}a^2-\boxed{タチ}a-\boxed{ツ}\right)$$

であるから，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ の内積は $a=\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ のとき最小値をとる。

このとき

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}\overrightarrow{OB}+\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}\overrightarrow{OC}$$

となる。したがって，直線 CP と線分 AB の交点を Q とすると

$$\frac{PQ}{CP}=\frac{\boxed{ヒ}}{\boxed{フ}},\quad \frac{QB}{AQ}=\frac{\boxed{ヘ}}{\boxed{ホ}}$$

である。

Dの座標は

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}=\frac{1}{3}\{2(2,\ 0,\ 0)+(0,\ 2,\ 0)\}$$

$$=\left(\frac{4}{3},\ \frac{2}{3},\ 0\right)$$

Eの座標は

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}=\frac{1}{3}\{2(0,\ 2,\ 0)+(0,\ 0,\ 4)\}$$

$$=\left(0,\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

Pの座標は

$$\overrightarrow{OP}=(1-a)\overrightarrow{OD}+a\overrightarrow{OE}=(1-a)\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},0\right)+a\left(0,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{4-4a}{3},\ \frac{2a+2}{3},\ \frac{4}{3}a\right) \quad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\left(\frac{4-4a}{3},\ \frac{2a+2}{3},\ \frac{4}{3}a\right)-(0,\ 2,\ 0)$$

$$=\left(\frac{4-4a}{3},\ \frac{2a-4}{3},\ \frac{4}{3}a\right)$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(0,\ 0,\ 4)-(2,\ 0,\ 0)$$

$$=(-2,\ 0,\ 4)$$

BP⊥AC より

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{4-4a}{3}\cdot(-2)+\frac{2a-4}{3}\cdot 0+\frac{4}{3}a\cdot 4=0$$

$$\therefore\quad a=\frac{1}{3}$$

また

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=(2,\ 0,\ 0)-\left(\frac{4-4a}{3},\ \frac{2a+2}{3},\ \frac{4}{3}a\right)$$

$$=\left(\frac{2+4a}{3},\ -\frac{2a+2}{3},\ -\frac{4}{3}a\right)$$

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}=(0,\ 0,\ 4)-\left(\frac{4-4a}{3},\ \frac{2a+2}{3},\ \frac{4}{3}a\right)$$

$$=\left(\frac{4a-4}{3},\ -\frac{2a+2}{3},\ \frac{12-4a}{3}\right)$$

よって

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\frac{2+4a}{3}\cdot\frac{4a-4}{3}+\left(-\frac{2a+2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2a+2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{3}a\right)\cdot\frac{12-4a}{3}$$

$$=\frac{4}{9}(9a^2-12a-1)$$

$$=\frac{4}{9}\left\{9\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-5\right\}$$

$a=\frac{2}{3}$ のとき，最小値をとる。

このとき，①に $a=\frac{2}{3}$ を代入すると $P\left(\frac{4}{9},\ \frac{10}{9},\ \frac{8}{9}\right)$

よって　$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{4}{9},\ \frac{10}{9},\ \frac{8}{9}\right)$

$$=\frac{2}{9}(2,\ 0,\ 0)+\frac{5}{9}(0,\ 2,\ 0)+\frac{2}{9}(0,\ 0,\ 4)$$

$$=\frac{2}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{5}{9}\overrightarrow{OB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{OC}$$

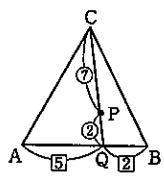
点Cを始点として表すと

$$\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CO}=\frac{2}{9}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO})+\frac{5}{9}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CO})+\frac{2}{9}(-\overrightarrow{CO})$$

$$\overrightarrow{CP}=\frac{2}{9}\overrightarrow{CA}+\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$$

$$=\frac{7}{9}\cdot\frac{2\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}}{7}$$

$\overrightarrow{CQ}=\frac{2\overrightarrow{CA}+5\overrightarrow{CB}}{7}$ であり　$\overrightarrow{CP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{CQ}$



である。したがって，Qは線分ABを5：2に内分し，Pは線分CQを7：2に内分する。

$$\frac{PQ}{CP}=\frac{2}{7},\quad \frac{QB}{AQ}=\frac{2}{5}$$

ベクトル ⑩

☐自力で解けた　☐解答見た

【15分】

Oを原点とする座標空間にある3点A，B，CをA(2，−2，1)，B(4，−1，−1)，C(3，3，0)とする。

(1) $|\overrightarrow{OA}|=\boxed{ア}$，$|\overrightarrow{OB}|=\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{エ}$であるから，

$\angle AOB=\boxed{オカ}^\circ$であり，△OABの面積は$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$である。

(2) 平面OAB上にある点をDとし，$\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$とおく，直線CDが平面OABと垂直になるとき，$s=\boxed{ケコ}$，$t=\boxed{サ}$であり，Dの座標は

$\left(\boxed{シ},\ \boxed{ス},\ \boxed{セソ}\right)$となる。これを利用して，四面体OABCの体積は

$\dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$であることがわかる。

(3) 四面体OABCをxz平面で切断したとき，点Aを含む側の立体の体積は

$\dfrac{\boxed{ツテ}}{\boxed{トナ}}$である。

(1) $\overrightarrow{OA}=(2,\ -2,\ 1)$, $\overrightarrow{OB}=(4,\ -1,\ -1)$ より

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$$
$$|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cdot4+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-1)=9$$

であるから

$$\cos\angle AOB=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{9}{3\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\therefore\quad \angle AOB=45^\circ$$

△OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sqrt{2}\cdot\sin45^\circ=\frac{9}{2}$$

(2) $\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(2s+4t,\ -2s-t,\ s-t)$ より

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=(2s+4t-3,\ -2s-t-3,\ s-t)$$

直線 CD が平面 OAB に垂直になるのは，OA⊥CD，OB⊥CD のときである。

OA⊥CD より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=2(2s+4t-3)-2(-2s-t-3)+(s-t)=0$$
$$\therefore\quad s=-t \quad\cdots\cdots①$$

OB⊥CD より

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CD}=4(2s+4t-3)-(-2s-t-3)-(s-t)=0$$
$$\therefore\quad s+2t=1 \quad\cdots\cdots②$$

①，②より　$s=-1$，$t=1$　　∴　D$(2,\ 1,\ -2)$

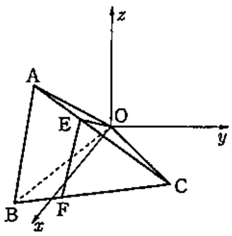
$\overrightarrow{CD}=(-1,\ -2,\ -2)$ より

$$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}=3$$

よって，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot3=\frac{9}{2}$$

(3) A，B，C の y 座標の符号がそれぞれ負，負，正であるから，辺 AC，辺 BC が xz 平面と交わる。その交点をそれぞれ E，F とすると，y 座標に注目して



$$AE:EC=2:3,\ BF:FC=1:3$$

△EFC と △ABC の面積の比は

$$\frac{\triangle EFC}{\triangle ABC}=\frac{EC\cdot FC}{AC\cdot BC}=\frac{3\cdot3}{5\cdot4}=\frac{9}{20}$$

四面体 OABC を xz 平面で切断したとき，A を含む側の立体は OABFE であり，その体積は四面体 OABC の $\frac{11}{20}$ 倍。

よって，求める体積は

$$\frac{11}{20}\mathrm{OABC}=\frac{11}{20}\cdot\frac{9}{2}=\frac{99}{40}$$

(注)　E，F の座標は

$$E\left(\frac{12}{5},\ 0,\ \frac{3}{5}\right),\ F\left(\frac{15}{4},\ 0,\ -\frac{3}{4}\right)$$