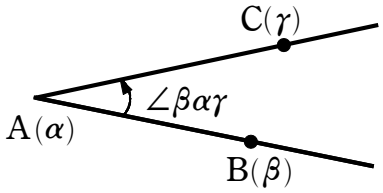
# 複素数平面　予習プリント９（教科書p29～31複素数と図形）

## D　半直線のなす角

A$(\alpha)$，B$(\beta)$，C$(\gamma)$ を異なる 3 点とするとき，半直線 AB から半直線 AC までの回転角を，$\angle\beta\alpha\gamma$ と表すことにする。




点 $\alpha$ が点 0 に移るような平行移動で，点 $\beta$ が点 $\beta'$ に，点 $\gamma$ が点 $\gamma'$ に移るとすると

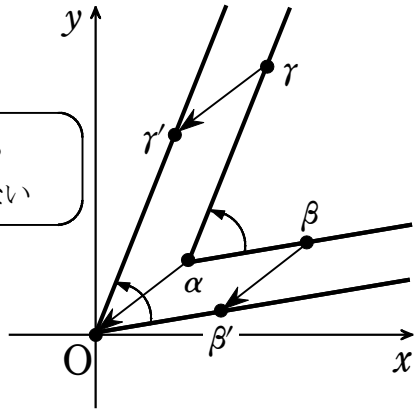
$$\beta'=\beta-\alpha,\ \gamma'=\gamma-\alpha$$

また　$\angle\beta\alpha\gamma=\angle\beta'0\gamma'$

平行移動しても角度は変わらない

$$=\arg\gamma'-\arg\beta'$$

$$=\arg\frac{\gamma'}{\beta'}$$




したがって，次の等式が成り立つ。

**半直線のなす角**

異なる 3 点 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ に対して　　$\angle\beta\alpha\gamma=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

**例 12**　$\alpha=1-2i$，$\beta=-i$，$\gamma=(1+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})i$ とする。

$-\pi<\angle\beta\alpha\gamma\leqq\pi$ の範囲で考えると

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i}{-1+i}=-\sqrt{3}\,i$$

$$=\sqrt{3}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

よって　　$\angle\beta\alpha\gamma=\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=$ 空欄ア　　終

**練習 21**　例 12 において，$\angle\alpha\beta\gamma$ の値を求めよ。ただし，$-\pi<\angle\alpha\beta\gamma\leqq\pi$ とする。

解答　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{(1+\sqrt{3})+(-1+\sqrt{3})i}{1-i}=1+\sqrt{3}\,i$

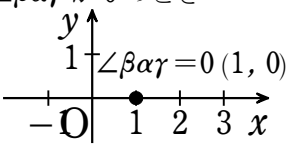
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

よって　　$\angle\alpha\beta\gamma=\arg\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}=\dfrac{\pi}{3}$

回転角 $\angle\beta\alpha\gamma$ が，特別な値をとる場合を考えてみよう。

$\angle\beta\alpha\gamma$ が 0 または $\pi$ であるのは，3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ が一直線上にあるときである。これは $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が 0 または $\pi$ であるとき，すなわち $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が $\boxed{\text{空欄イ}}$ のときである。

$\angle\beta\alpha\gamma$ が 0 のとき



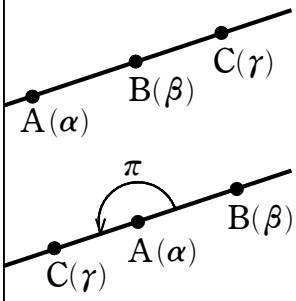

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos 0+i\sin 0$

$=1$　(実数)

$\angle\beta\alpha\gamma$ が $\pi$ のとき

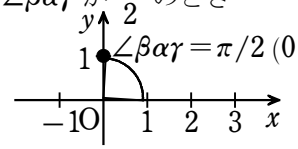
$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\pi+i\sin\pi$

$=-1$　(実数)




また，$\angle\beta\alpha\gamma$ が $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ であるのは，2 直線 AB，AC が垂直に交わるときである。これは $\arg\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ または $-\dfrac{\pi}{2}$ であるとき，すなわち $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が $\boxed{\text{空欄ウ}}$ のときである。

$\angle\beta\alpha\gamma$ が $\dfrac{\pi}{2}$ のとき




$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$

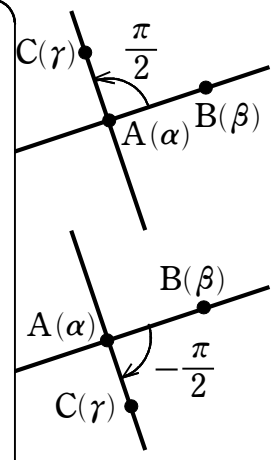
$=i$　(純虚数)

$\angle\beta\alpha\gamma$ が $-\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$

$=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=-i$　(純虚数)




よって，異なる 3 点 $A(\alpha)$，$B(\beta)$，$C(\gamma)$ について，次のことが成り立つ。

**3 点 A，B，C が一直線上にある** $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **が実数**

**2 直線 AB，AC が垂直に交わる** $\iff$ $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ **が純虚数**

**練習 22**　$c$ は実数の定数とする。$\alpha=c+i$，$\beta=1$，$\gamma=3i$ を表す点を，それぞれ A，B，C とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるように，$c$ の値を定めよ。

(2)　点 A が線分 BC を直径とする円上にあるように，$c$ の値を定めよ。

解答　(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{3i-(c+i)}{1-(c+i)}=\dfrac{-c+2i}{(1-c)-i}=\dfrac{(-c+2i)\{(1-c)+i\}}{\{(1-c)-i\}\{(1-c)+i\}}$

$=\dfrac{(c^2-c-2)+(2-3c)i}{c^2-2c+2}$

$2-3c=0$ から　　$c=\dfrac{2}{3}$

(2)　条件から，2 直線 AB，AC は垂直に交わる (A は，B，C に一致しない)。

(1) から　　$c^2-c-2=0$　かつ　$2-3c\neq 0$

これを解いて　　$c=-1,\ 2$

**応用例題 2**

異なる 3 つの複素数 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の間に，等式

$$\sqrt{3}\gamma - i\beta = (\sqrt{3} - i)\alpha$$

が成り立つとき，3 点 A($\alpha$)，B($\beta$)，C($\gamma$) を頂点とする △ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

〈**解説**〉 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の値から，∠A の大きさ，2 辺 AB，AC の比を求める。

**解**　等式から　$\sqrt{3}(\gamma-\alpha) = i(\beta-\alpha)$

ゆえに　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}i$

これは $\boxed{\text{空欄ウ}}$ であるから，2 直線 AB，AC は垂直に交わり

$$\angle A = \boxed{\text{空欄エ}}$$

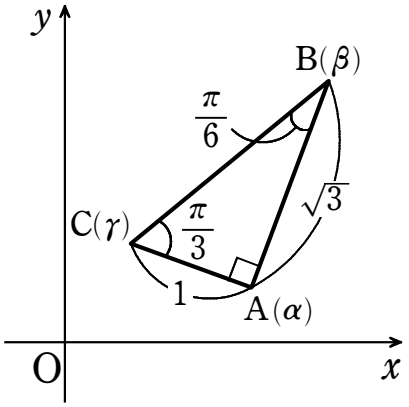
また，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから

$$|\beta-\alpha| = \sqrt{3}\,|\gamma-\alpha|$$

AB $= \sqrt{3}$ AC であるから

$$\text{AB} : \text{AC} = \boxed{\text{空欄オ}} : 1$$

よって　$\angle B = \dfrac{\pi}{6}$，$\angle C = \dfrac{\pi}{3}$




**練習 23**　異なる 3 つの複素数 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ の間に，等式

$$2\gamma - (1+\sqrt{3}\,i)\beta = (1-\sqrt{3}\,i)\alpha$$

が成り立つとき，3 点 A($\alpha$)，B($\beta$)，C($\gamma$) を頂点とする △ABC の 3 つの角の大きさを求めよ。

解答　$2\gamma - (1+\sqrt{3}\,i)\beta = (1-\sqrt{3}\,i)\alpha$ から

$2\gamma - 2\beta + (1-\sqrt{3}\,i)\beta = (1-\sqrt{3}\,i)\alpha$

よって　$2(\gamma-\beta) = (1-\sqrt{3}\,i)(\alpha-\beta)$

ゆえに　$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta} = \dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　したがって　$\angle B = \dfrac{\pi}{3}$

$\left|\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha-\beta}\right| = 1$ であるから　$|\gamma-\beta| = |\alpha-\beta|$　　よって　BC = BA

ゆえに，△ABC は正三角形であるから　$\angle A = \angle B = \angle C = \dfrac{\pi}{3}$