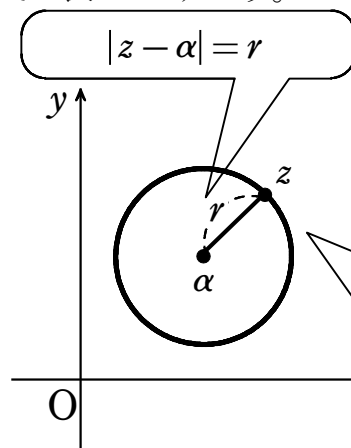


B 方程式の表す図形

複素数平面上的の円や直線を，複素数 z の方程式で表してみよう。

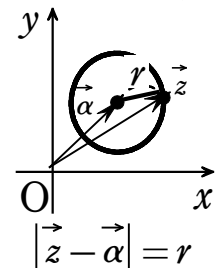
r は正の実数とする。点 α を中心とする半径 r の円は，次の方程式を満たす点 z 全体である。

$$|z - \alpha| = r$$



数学B

ベクトル方程式



例9 原点を中心とする半径1の円は，

方程式 $|z| =$ で表される。

$$|z - 0| = 1 \text{ と考える}$$

練習16 次の方程式を満たす点 z 全体は，どのような図形か。

(1) $|z| = 2$

(2) $|z - i| = 1$

(3) $|z - 1 - i| = 2$

【解答】 (1) 原点を中心とする半径2の円 (2) 点 i を中心とする半径1の円 (3) 点 $1 + i$ を中心とする半径2の円

2点 $A(\alpha)$ ， $B(\beta)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線上の点を $P(z)$ とする。このとき

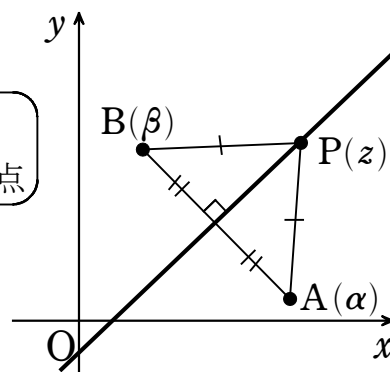
$$AP = BP$$

2点 $A(\alpha)$ ， $B(\beta)$ から等距離にある点

であるから，方程式

$$|z - \alpha| = |z - \beta|$$

を満たす点 z 全体は，線分 AB の垂直二等分線である。

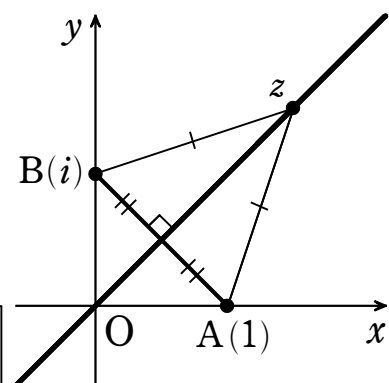


例10 方程式 $|z - 1| = |z - i|$ を満たす

点 z 全体は，2点 A ()， B () を結

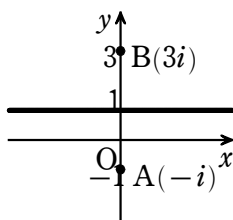
ぶ線分 AB の であ

る。



練習17 方程式 $|z + i| = |z - 3i|$ を満たす点 z 全体を図示せよ。

【解答】



例題 4 方程式 $|z+3|=2|z|$ を満たす点 z 全体は、どのような図形か。

解 方程式の両辺を 2 乗すると

$|z+3|^2=4|z|^2$

よって $(z+3)(\overline{z+3})=4z\overline{z}$

ゆえに $(z+3)(\overline{z}+3)=4z\overline{z}$

左辺を展開して整理すると

$z\overline{z}-(z+\overline{z})+3=3$

よって $(z-1)(\overline{z}-1)=2^2$

すなわち $|z-1|=2$

したがって、求める図形は

点 $(1, 0)$ を中心とする半径 2 の円である。

$|z|^2=z\overline{z}$ である。
 $|z+3|^2=(z+3)(\overline{z+3})$ である。
 $z=a+bi$ とすると
 $\overline{z}=a-bi$ である。
 $|z|^2=a^2+b^2$ なので
 $|z|^2=(a+bi)(a-bi)$ 。
 すなわち
 $|z|^2=z\overline{z}$

$z\overline{z}-(z+\overline{z})+1=3+1$
 $(z-1)(\overline{z}-1)=4$
 $(z-1)(\overline{z}-1)=2^2$

$(z-1)(\overline{z}-1)=|z-1|^2$

例題 4 の円は、2 点 $A(-3)$ と $O(0)$ からの距離の比が $2:1$ である点 z 全体である。このような円を **アポロニウスの円** という。

練習 18 次の方程式を満たす点 z 全体は、どのような図形か。

(1) $3|z+2|=|z-6|$

(2) $|z-4i|=2|z-i|$

【解答】 (1) 点 -3 を中心とする半径 3 の円 (2) 原点を中心とする半径 2 の円

例題 4 において、 $z=x+yi$ とすると、 $|z+3|=2|z|$ から

$|(x+3)+yi|=2|x+yi|$

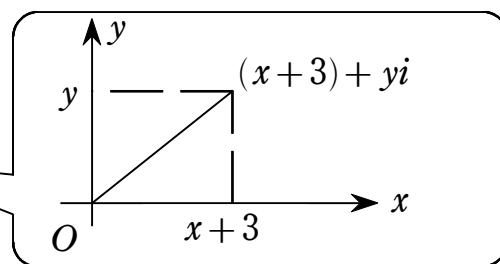
両辺を 2 乗すると $|(x+3)+yi|^2=4|x+yi|^2$

よって $(x+3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$

整理すると $3(x^2-2x+1)+3y^2=12$

したがって $(x-1)^2+y^2=4$

この方程式は、座標平面上において、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 2 の円を表す。



点 z がある図形上を動くとき、それにもなって動く点 w が描く図形について考えてみよう。

例題 5 点 z が、原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき、点 -4 と点 z を結ぶ線分の中点 w は、どのような図形を描くか。

解 点 z は中心 O 、半径 2 の円上にあるから

$$|z| = \text{空欄セ}$$

w は点 -4 と点 z を結ぶ線分の中点

$$w = \frac{\text{空欄ソ}}{2} \text{ であるから}$$

$$z = 2(w + 2)$$

z について解いた

$$\text{よって } |2(w + 2)| = 2$$

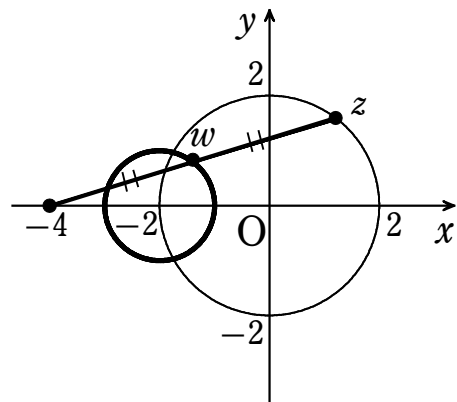
$|z| = 2$ に代入

$$\text{ゆえに } |w + 2| = 1$$

したがって、点 w は

点 空欄タ を中心とする

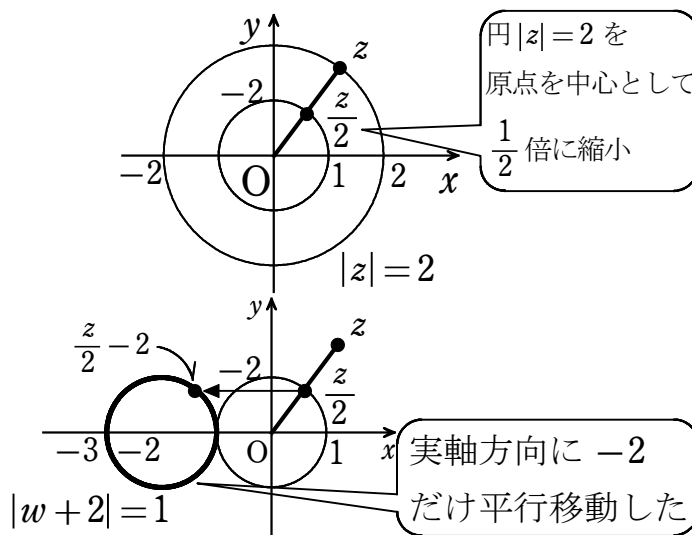
半径 空欄チ の円を描く。



例題 5 において、点 w の描く図形は次のように考えても求められる。

$w = \frac{z}{2} - 2$ であるから、求める図形は、

円 $|z| = 2$ を原点を中心として $\frac{1}{2}$ 倍に縮小し、実軸方向に -2 だけ平行移動したものである。



練習 19 $w = 1 + iz$ とする。点 z が原点 O を中心とする半径 1 の円上を動くとき、点 w はどのような図形を描くか。

解答 $w = 1 + iz$ から $z = \frac{w-1}{i}$

$$|z| = 1 \text{ であるから } \left| \frac{w-1}{i} \right| = 1$$

$$\text{よって } |w-1| = 1$$

ゆえに、点 w は点 1 を中心とする半径 1 の円を描く。